Quantum Computing

“Quantum Circuits-2”

Dr. Cahit Karakuş, Mart - 2021

Qubits and vectors

For qubits the computational basis (0 and 1) is represented by two ket vectors:

$|0\rangle = 0$

$|1\rangle = 1$

These vectors can be represented as column vectors which are very useful as you will find later:

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Baz Vektörler

Skaler çarpım:

- $\vec{Y} = \alpha\vec{V} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$

- $\vec{V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

- Katsayılarının mutlak değerlerinin kareleri toplamı 1 olmak zorunda. Bir vektör baz vektörleri şeklinde genişletilebilir. Her sütunda bir 1 olmak zorunda. Katsayılar negatif, pozitif ve kompleks sayılar olabilir.

Vektörel Çarpımlar

$$\langle\Psi||\Phi\rangle = \langle\Psi\Phi\rangle \quad \text{"Inner Product"}$$
$$|\Psi\rangle\langle\Phi| = |\Psi\Phi| \quad \text{"Outer Product"}$$
$$|\Psi\rangle|\Phi\rangle = |\Psi\Phi\rangle \quad \text{"Tensor Product"}$$

$$\langle\Psi|\langle\Phi| \qquad \text{Invalid Operation}$$

Ket sütun vektörden, bra satır vektöre dönüşüm yapılırken komleks eşleneği alınır. Kompleks ifadelerin işaretlerinin tersi alınır.

Inner products, orthogonality and norms

Let $|u\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, and $|v\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, we define the inner product:

$$\langle u|v\rangle = \langle u| \times |v\rangle = [a_1^* \quad \dots \quad a_n^*] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

If each of $|u\rangle$ and $|v\rangle$ have at least one non-zero element:

- $\langle u|v\rangle = (\langle v|u\rangle)^*$
- If $\langle u|v\rangle = 0$ then $|u\rangle$ and $|v\rangle$ are orthogonal.
- $\langle u|u\rangle = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$, which is a positive real number.
- $||\,|u\rangle\,|| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$ is defined as the norm of $|u\rangle$, unit vectors have norm $= 1$.

Inner Product

Inner Product — <ΨΦ>

A product of two quantum states bra *Psi* <Ψ| and ket *Phi* |Φ> is called an **inner product**, producing a **value**. An inner product is also called an *overlap*, the overlap between quantum states.

$$\begin{aligned} \langle \Psi || \Phi \rangle &= \langle \Psi \Phi \rangle \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}i & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{4}{10}i + \frac{3\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-4i}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, Bu bir Qubit midir?

$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$; Katsayıların mutlak değerlerinin karelerinin toplamı 1'e eşit olacak.

$|\emptyset\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, Bu bir Qubit midir?

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; Katsayıların mutlak değerlerinin karelerinin toplamı 1'e eşit olacak.

Outer Products

Inner products aren't the only way to multiply vectors. Occasionally, we'll switch the order of the bra and ket in order to take the **outer product,** whose outcome is a matrix, rather than a single number. For two vectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$ in a Hilbert space, we denote the outer product as $|a\rangle\langle b|$, where $\langle b|$ is equal to the conjugate transpose of $|b\rangle$, as before. This gets us:

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots & b_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \cdots & a_1 b_n^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n b_1^* & \cdots & \cdots & a_n b_n^* \end{pmatrix}$$

Tensor products

Most often, you'll see the tensor product used to describe the shared state of two or more qubits. Notice here that the tensor product doesn't require taking one of the vector's conjugate transposes like the outer product does—we're multiplying two kets together instead of a ket and a bra. The tensor product of vectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$, written $|a\rangle \otimes |b\rangle$ or $|ab\rangle$, equals:

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

If we want to act on the new vector produced by the tensor product of $|a\rangle$ and $|b\rangle$, we'll have to take the tensor product of the operators we hope to act on them with as well. The tensor product of matrices A and B equals:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

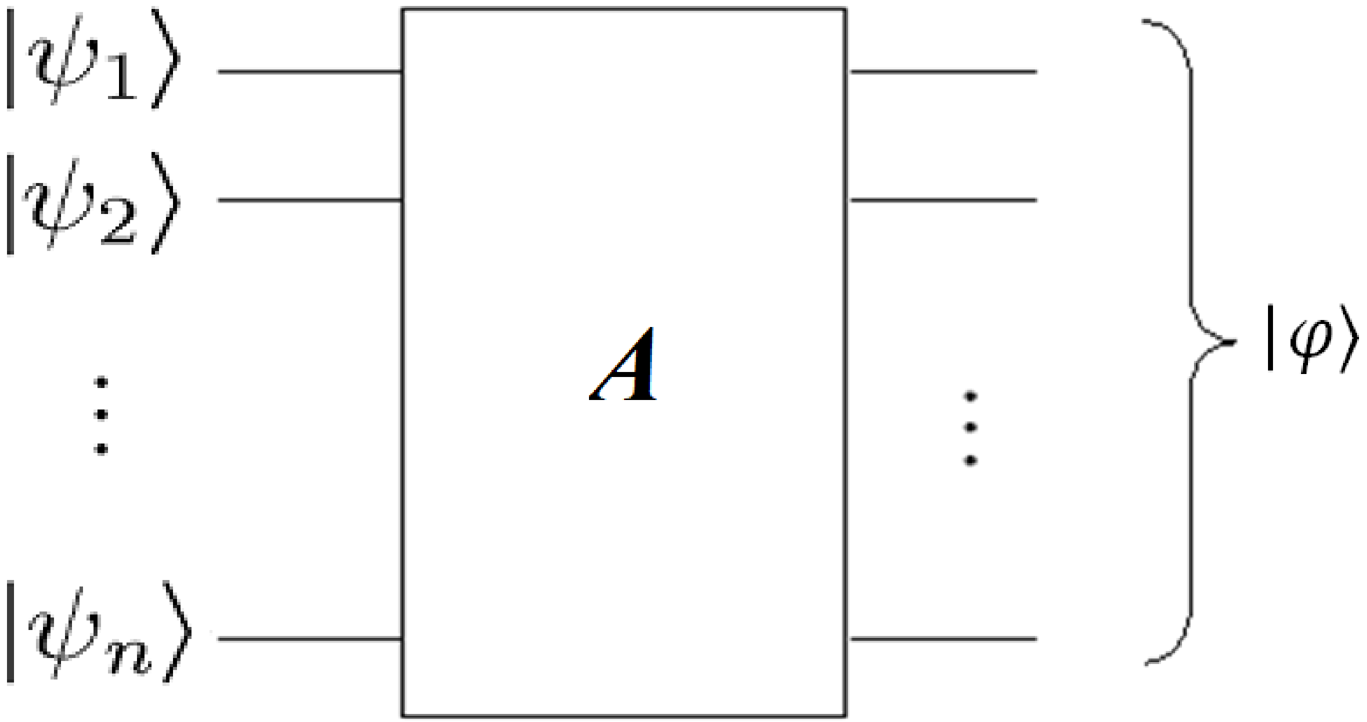
Tensor products and outer products

Tensor çarpım bir vektör üretir. Çıkış üetir.
Dış çarpım bir matris üretir.
Quantum lojik devre üretir.

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|00\rangle\langle 00| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quantum Computing



Giriş biliniyor.
Çıkış çökertilir. Çıkışda biliniyor.
A matrisi bilinmiyor.

Hermesyen Matris

- Normalizasyon koşulu $A|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ ifadesine uygulanırsa, mutlak kareleri de birbirine eşit olacaktır,
- $|\, A|\psi\rangle|^2 = ||\varphi>|^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$
- Kompleks bir ifadenin mutlak değerinin karesi, kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir. $|\varphi\rangle$ Ket fi'nin kompleks eşleniği $\langle\varphi|$ bra fi'dir. Sağ tarafından mod karesi alınırsa,
- $\langle\psi|A^{*}A|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$, A^{*}, A'nun Hermisyen eşdeğeridir.
- **Hermisyen matris, transposesi (Matrisin satırları ile sutünları yer değiştirilir) alınan bir matrisin tüm elemanlarının k**ompleks eşleniğinin alınması ile elde edilir, matrisin adjoint'i denir. Quantum dünyasında bir matrisin Hermisyeni, kendisi ile çarpımı birim matrisdir. Eğer matris kompleks değilse, matrisin transposesi Adjoint, Hermesyen eşleniğidir.
- $\langle\psi|A^{+}A|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ bu işlemin sağlanmasının tek şartı $A^{+}A = \mathrm{I}$, birim operatöre ya da birim matrise eşit olmasıdır.
- Bir matrisin bir quantum lojik kapı olabilmesi için sağlaması gereken yeterli ve gerekli tek koşul kendisinin Hermesyen eşleniği ile çarpımının birim matrise eşit olmasıdır. Bu özellikleri sağlayan matrislere uniter matris denir. Bu operatörlere uniter operatörler denir.

Adjoints: Eşlenik Matris, Hermityen Matris

Associated with any linear operator A is its *adjoint* $A^\dagger$ which satisfies

$$\langle v|Aw\rangle = \langle A^\dagger v|w\rangle$$

In terms of matrices, $A^\dagger = (A^*)^T$

where $*$ denotes complex conjugation and T denotes transposition.

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

Normal, Hermitian and unitary matrices

- A matrix is *normal* if $A^\dagger A = AA^\dagger$
  - A matrix is normal if and only if it is diagonalisable[1].
  - If $A = A^\dagger$ a matrix is *Hermitian*.
- A matrix is *unitary* if $A^\dagger A = AA^\dagger = I$ (the identity).
  - Unitary matrices play an important role in quantum computing.
  - Clearly all unitary matrices are normal therefore diagonalisable.
  - All eigenvalues of unitary matrices have absolute value one.
  - Unitary operators preserve inner products: if U is unitary and $|u'\rangle = U|u\rangle$ and $|v'\rangle = U|v\rangle$ then:

$$\begin{aligned}\langle u'|v'\rangle &= (U|u\rangle)^\dagger (U|v\rangle)\\ &= (\langle u|U^\dagger)(U|v\rangle)\\ &= \langle u|(U^\dagger U)|v\rangle\\ &= \langle u|I|v\rangle\\ &= \langle u|v\rangle\end{aligned}$$

[1] Note that the definition of "diagonalisable" that we have used in this lecture is the standard definition used in quantum mechanics, but elsewhere sometimes the slightly more general requirement that the eigenvectors form some (not necessarily orthonormal) basis is used.

Quantum Circuit Model of Quantum Computation

Classical Logic Circuits

– Devre davranışı dolaylı olarak klasik fizik tarafından yönetilir
– Sinyal durumları basit bit vektörleridir, örn. X = 01010111
– İşlemler Boole Cebri tarafından tanımlanır
– Sinyallerin kopyalanması veya ölçülmesi konusunda herhangi bir kısıtlama yoktur.
– Küçük, iyi tanımlanmış üniversal kapı tipi setleri, örn. {NAND}, {AND,OR,NOT}, {AND,NOT}, vb.
– İyi geliştirilmiş CAD (Computer Aided Design) metodolojileri mevcuttur
– Devreler, CMOS gibi hızlı, ölçeklenebilir ve makroskopik teknolojilerde kolayca uygulanır.

Quantum Logic Circuits

– Devre davranışı açıkça kuantum mekaniği tarafından yönetilir
– Sinyal durumları, karmaşık sayı katsayılarına sahip ikili “qubit” vektörlerinin üst üste binmesi olarak yorumlanan vektörlerdir.

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i \left| i_{n-1} i_{n-1} \ldots i_0 \right\rangle$$

– İşlemler, Hilbert Uzayı üzerinde doğrusal cebir ile tanımlanır ve karmaşık elemanlara sahip üniter matrislerle temsil edilebilir.
– Sinyallerin kopyalanması ve ölçülmesi konusunda ciddi kısıtlamalar mevcuttur
– Birçok üniversal kapı seti mevcuttur, ancak en iyi tipler açık değildir.
– Devreler, yavaş, kırılgan ve henüz ölçeklenemeyen mikroskobik teknolojileri kullanmalıdır, örn.

Quantum Circuit Characteristics

- Unitary Operations
  - Gates and circuits must be reversible (information-lossless)
    - Number of output signal lines = Number of input signal lines
    - The circuit function must be a bijection, implying that output vectors are a permutation of the input vectors
  - Classical logic behavior can be represented by permutation matrices
  - Non-classical logic behavior can be represented including state sign (phase) and entanglement

Quantum Measurement

– Ölçüm, üst üste binen durumların yalnızca bir X durumunu verir
– Ölçüm ayrıca X'i yeni durum yapar ve bu nedenle hesaplama süreçlerine müdahale eder.
– X, ≤ 1 olasılıkla belirlenir, bu da sonuçta belirsizliğe işaret eder
– Durumlar kopyalanamaz (“klonlanamaz”), bu da sinyal çıkışına izin verilmediğini ima eder.
– Çevresel müdahale, ölçüm benzeri bir durum çökmesine (eşevresizlik) neden olabilir

Physical Implementation

Quantum Technology Requirements

- İyi karakterize edilmiş kübitlerle ölçeklenebilir
- $|00\ldots0\rangle$ gibi saf bir duruma başlatılabilir
- Nispeten uzun dekoherans süresi
- “Evrensel” kuantum kapıları seti
- Qubit'e özgü ölçüm yeteneği ve
- Qubit'leri hatasız iletme yeteneği

Physical Implementation

Main Contenders

- NMR (nuclear magnetic resonance)
- Ion traps
- Optical lattices
- Quantum dots
- Electrons on liquid helium

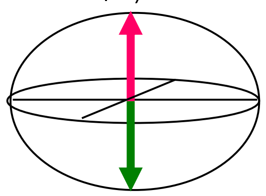
etc.

Main Deficiency

- Poor scalability

Physical Implementation: NMR

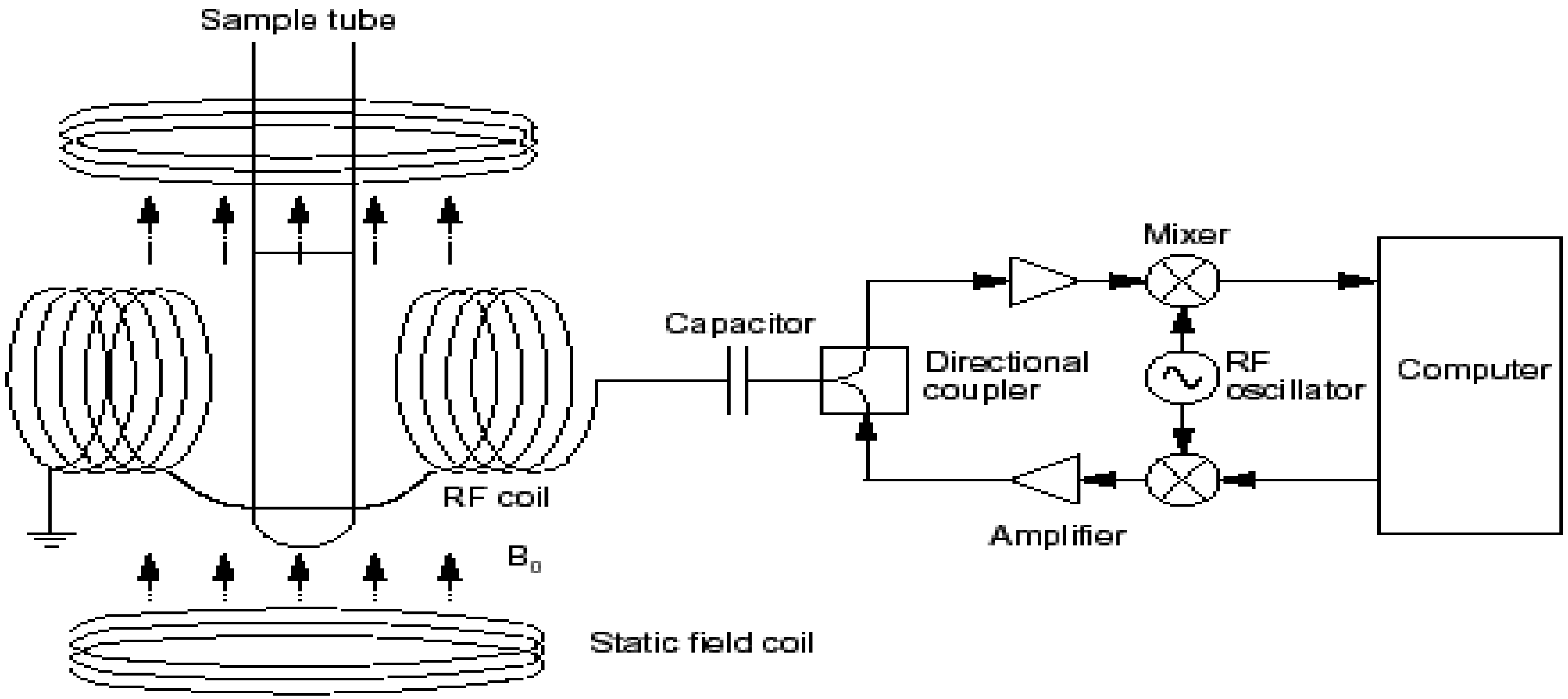
- Many atoms have a nucleus with quantum "spin" like a tiny bar magnet. Spin up/down = $|0\rangle/|1\rangle$.



- Birkaç atomun dönüşü, bir molekülde kimyasal olarak birleştirilebilir, ancak farklı rezonans frekansları nedeniyle seçici olarak adreslenebilir durumda kalır.
- Bir RF darbesi, uygulanan darbenin genliği ve süresiyle orantılı bir şekilde bir atomun dönüşünü döndürebilir.
- Geçit/devre işlemi gibi bir hesaplama, dikkatlice boyutlandırılmış ve ayrılmış RF darbelerinden oluşan bir diziden oluşur.
- Birçok molekül (ör. 1018), makroskobik ve yönetilebilir boyutta aynı durumdaki bir topluluk oluşturmak için sıvı solüsyonda birleştirilebilir.

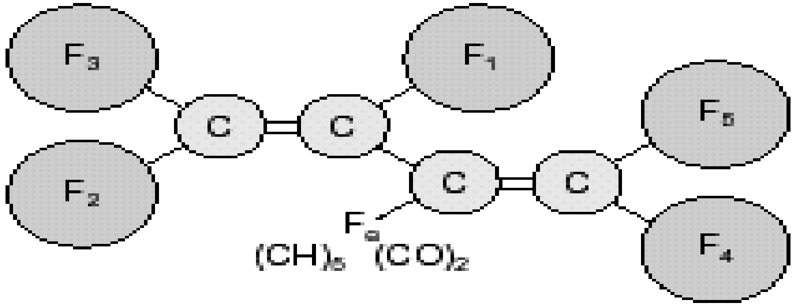
Physical Implementation: NMR

- Five-qubit NMR computer [Steffen et al. 2001]

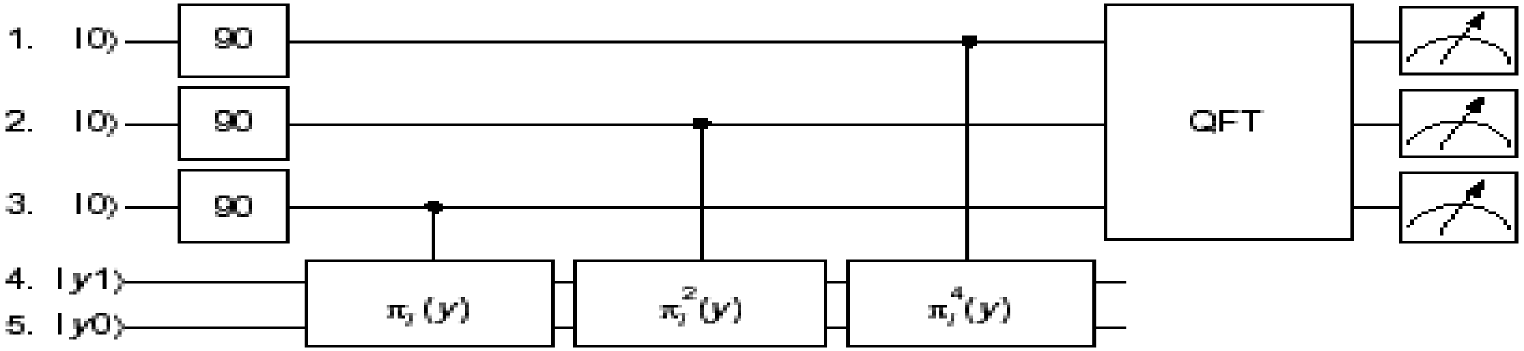


Physical Implementation: NMR

- Five-qubit computer (contd.)
  - Molecule with 5 flourine atoms whose spins implement the qubits



  - Experimental 5-qubit circuit to find the order of a permutation

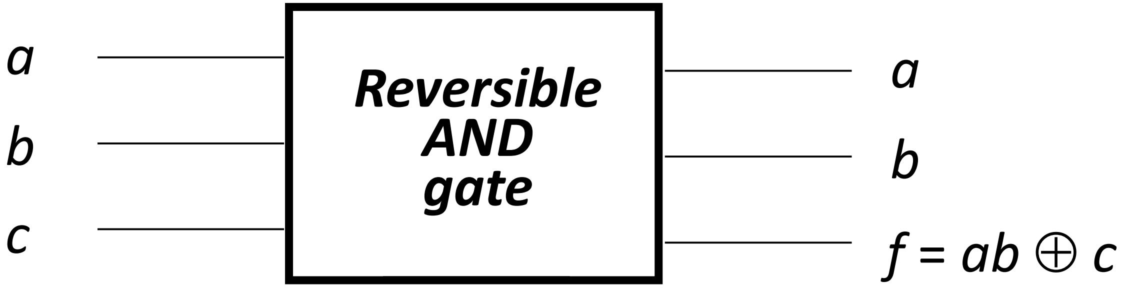


Reversible Circuits

Tersinir: Bir olayın oluşum koşullarındaki sonsuz küçük bir değişikliğin etkisiyle herhangi bir anda yön değiştirebilen (fiziksel, kimyasal ve mekanik dönüşüm).

Reversible Circuits (Tersinir Devreler)

- How to make a given *f* reversible
  - Suppose $f : i \to f(i)$ has *n* inputs *m* outputs
  - Introduce *n* extra outputs and *m* extra inputs
  - Replace *f* by $f_{\text{rev}}: i, j \to i, f(i) \oplus j$ where $\oplus$ is XOR
- Example 1: $f(a,b) = \text{AND}(a,b)$

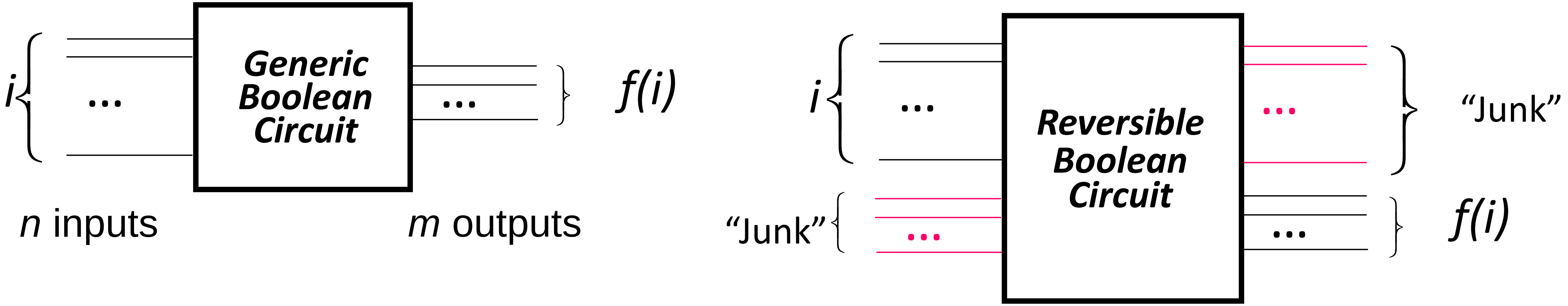


a	*b*	*c*	*a*	*b*	*f*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

- This is the well-known Toffoli gate, which realizes AND when $c = 0$, and NAND when $c = 1$.

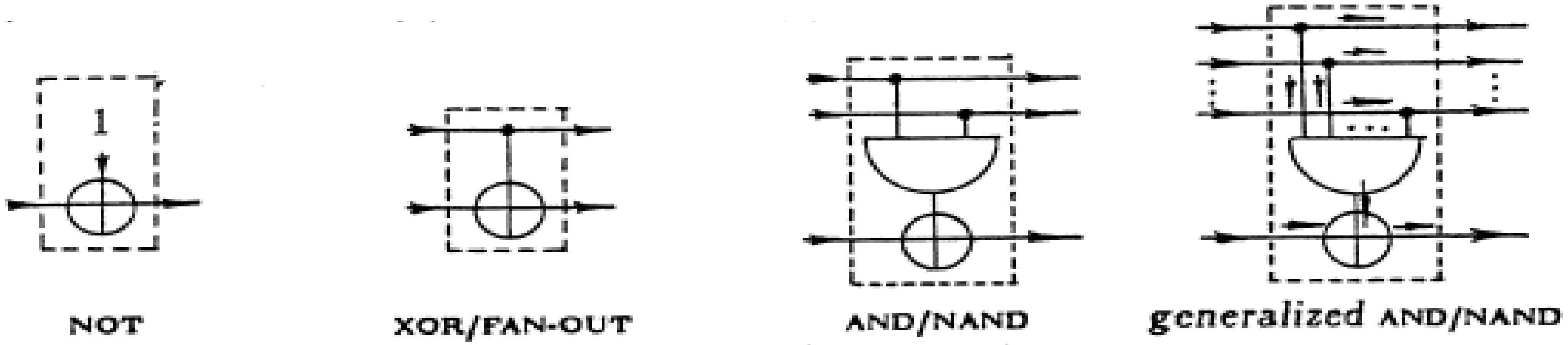
Reversible Circuits

- Reversibility was studied around 1980 motivated by power minimization considerations
- Bennett, Toffoli et al. showed that any classical logic circuit *C* can be made reversible with modest overhead



Reversible Circuits

- Reversible gate family [Toffoli 1980]

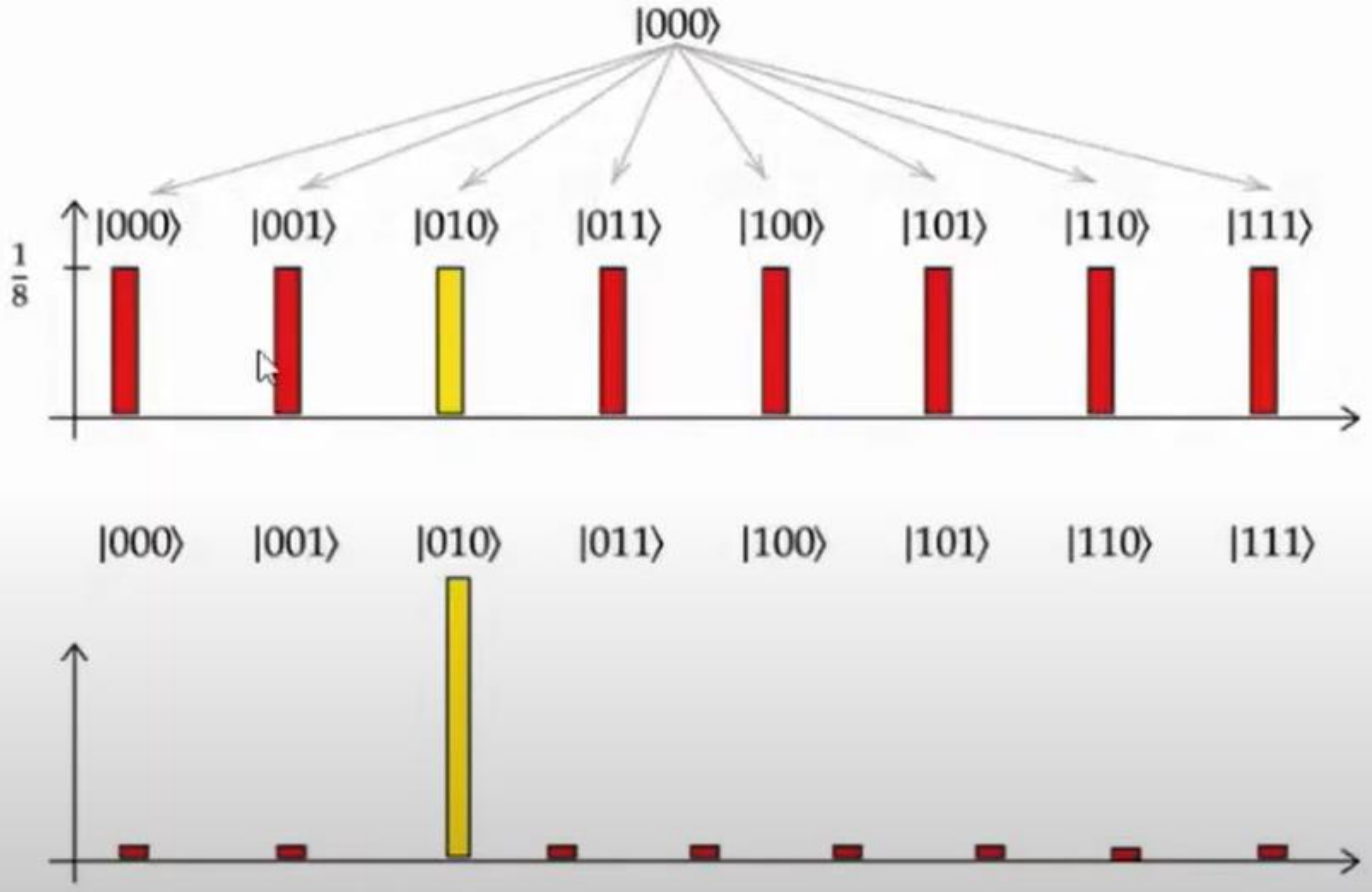


(Toffoli gate)

Every Boolean function has a reversible implementation using Toffoli gates.
There is no universal reversible gate with fewer than three inputs

Quantum Computing Algorithms

Grover's Search Algorithm



- Given a list of N elements, where some of them are marked, find the marked elements by making queries.
- Classical: O(N)
- Quantum: O($\sqrt{N}$)
- The list can be the search space, and marked element can be the solution.
- Applies to NP-Complete problems.

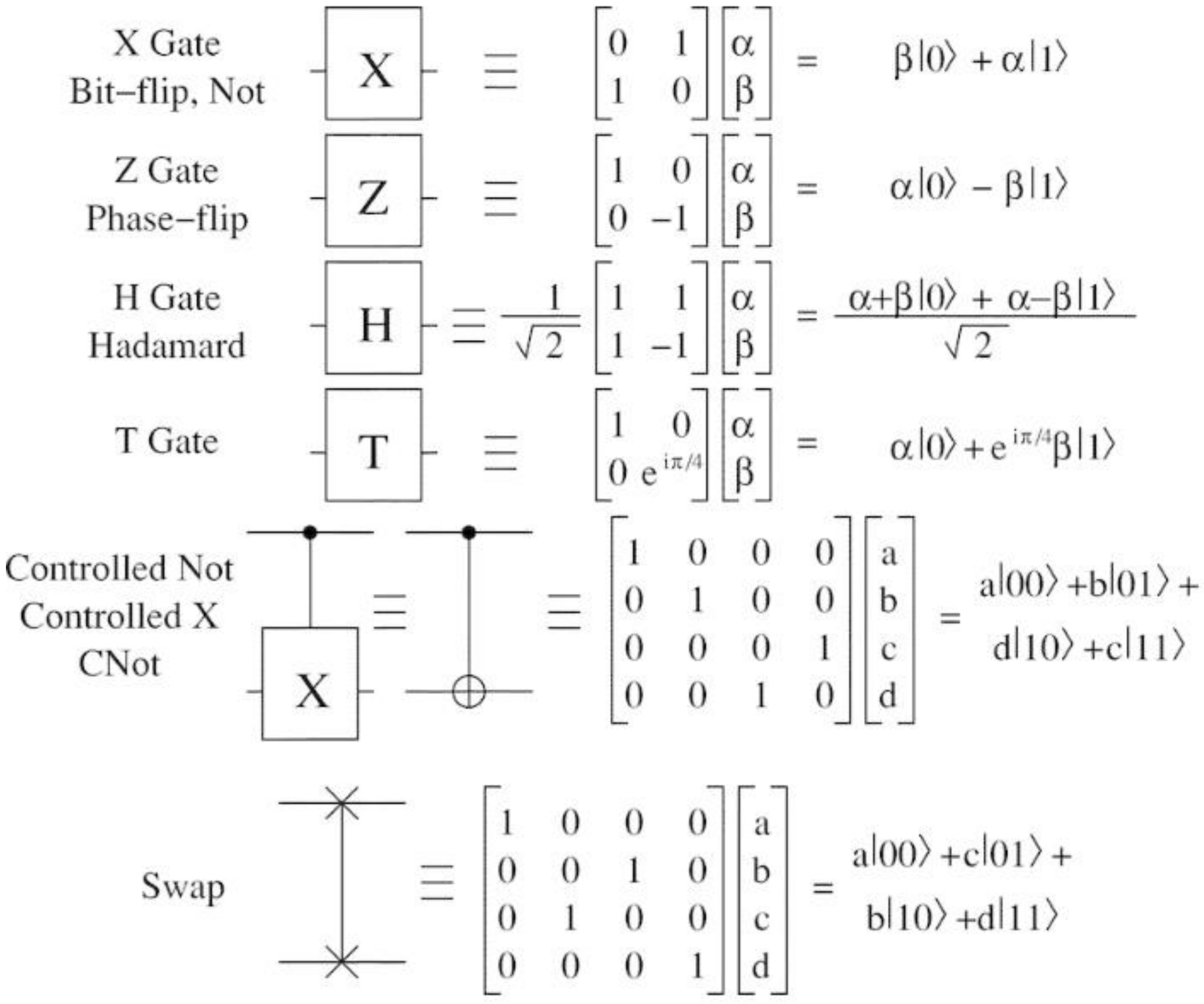
Grover’s Search Algoritması

- 8 elemandan sadece 1 tanesi işaretlidir. Bu işaretli elemanı araştırıp bulmaya çalışıyoruz. Aynı anda bütün elemanları göremiyoruz. Tek tek bakılması gerekmektedir. 1’den 8’e kadar bir rakam tutmuşsunuz ben tuttuğunuz sayıyı tahmin etmeye çalışıyorum. Size sorarak bulmaya çalışırsam, sansım yok ise ancak sekizinci denemede bulurum.

- Quantum hesaplamada karekök 8 ile tutulan sayı belirlenebilmektedir. Burada süperpozisyondan yararlanıyoruz.
- Quantum hesaplama paralel arama mı yapıyor? Paralel arama var ancak aynı anda hepsine paralel bakılmıyor. Çünkü gözlem yapıldığında sadece bir tane durum görünür. Gözlem yapıldığı anda sekiz tane sonucun durumuna aynı anda ulaşılması mümkün değil.
- Grover’s algoritma işaretli elemanın genliğini artırır. Onun genliği artarken diğerleri azalıyor. Ölçüm yapıldığı anda işaretli eleman daha yüksek olasılıklı görünür. Hata payı vardır, yüksek olasılıkla işaretlenmiş olan görünür.

Quantum Gates

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$



$$\psi = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

The Hadamard matrix

Another important one-qubit unitary is the Hadamard matrix:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Which has the following effect on the computational basis states:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \equiv |+\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \equiv |-\rangle$$

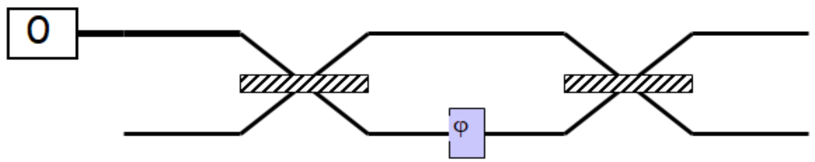
i.e., it puts the computational basis states in superposition. H is self-inverse, therefore:

$$H|+\rangle = |0\rangle \qquad H|-\rangle = |1\rangle$$

i.e., it interferes the superposition to recover the original computational basis states.

Uygulamalar

Örnek-1.0: Quantum Circuit



corresponds to

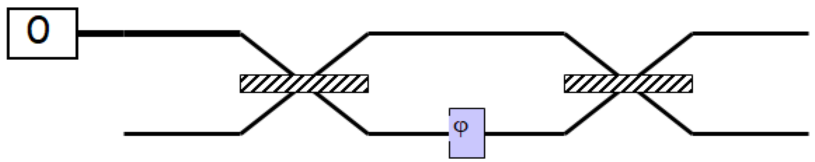
$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quantum lojik kapısı olabilmesi için, Hermesyen eşleniği ile çarpımının birim matrise eşit olmasıdır

A= $\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ bu matris Hermesyen eşleniği(Adjoint) nedir? $A^T = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \; A^+ = \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{i}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{-i}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; A matrisi quantum lojik kapısıdır.

Örnek-1.1: Quantum Circuit



corresponds to

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quantum devresinin durumunu yorumlayınız.

$$\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \\ \frac{i}{2} + \frac{ie^{i\varphi}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

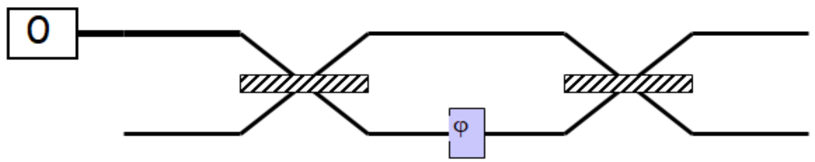
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, ie^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-1+e^{i\varphi})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{2}(-1+e^{i\varphi})|0\rangle + \frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})|1\rangle = \alpha\ |\ 0\rangle + \beta\ |\ 1\rangle =$ i$|1\rangle$; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\varphi = 0\ degree$ olur.

Örnek-1.2: Çökertmek İstenirse

- $\frac{1}{2}(-1+e^{i\varphi})\binom{1}{0}+\frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})\binom{0}{1}$
- $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$
- Burada α ya da β değeri 0 olacaktır.
- $|\alpha|^2 + |\beta|^2=1$
- $|0\rangle$ ‘a çöksün, $\beta=0$ olsun $\frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})=0$, $\varphi=\pi$ $olmalıdır$.
- $\alpha = -1$ $olur$.

Örnek-1.3: Quantum Circuit



corresponds to

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quantum devresinin durumunu yorumlayınız.

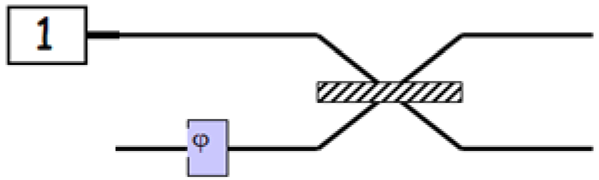
$= \frac{1}{2}(-1+e^{i\varphi})|0\rangle + \frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})|1\rangle = \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle = i|1\rangle$; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\varphi = 0\ degree$ olur.

$i|1\rangle = e^{\frac{i\pi}{2}}|1\rangle$

$= \frac{1}{2}(-1+e^{i\varphi})|0\rangle + \frac{i}{2}(1+e^{i\varphi})|1\rangle = \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle = -|0\rangle$; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\varphi = \pi\ degree$ olur.

φ’ye 0 ile 360 derece (0 ile 2π) arasında verilen değerler ile elektronun yönünü ve durumunu belirlenebilmektedir.

Örnek-1.4: Quantum Circuit



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ olursa devre H$|1\rangle$ olur.

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ olursa devre H$|0\rangle$ olur.

Örnek-2.0: Quantum Circuit

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

S=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

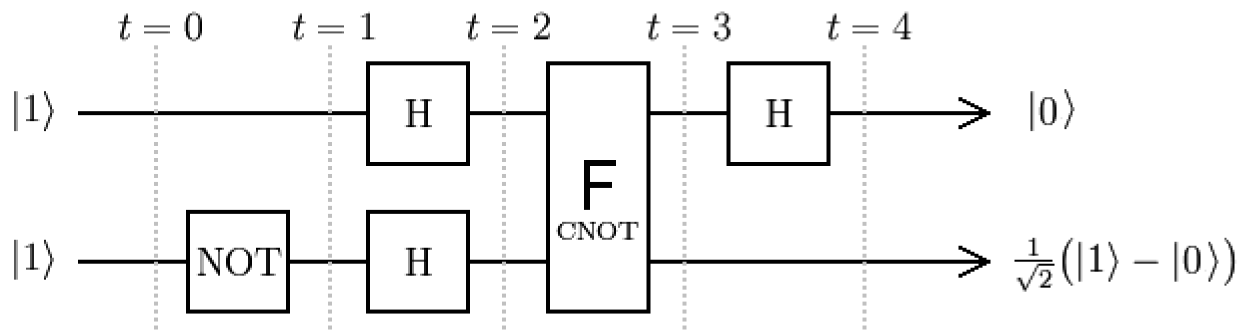
$|1\rangle$=$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

S$|1\rangle$=i$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Yorumu: $|1\rangle$ yatay durumundan 90 derece spin olmuştur.

$AS|1\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{i}e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

1) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ise $AS|1\rangle=|1\rangle$
2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ise $AS|1\rangle$=-$|1\rangle$
3) φ=0 ise $AS|1\rangle=\mathrm{i}|1\rangle$

Örnek-3.0



The Hadamard gate

$$\mathrm{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle + |0\rangle\big)$$
$$\mathrm{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle - |0\rangle\big)$$
$$\mathrm{HH}|1\rangle = |1\rangle$$
$$\mathrm{HH}|0\rangle = |0\rangle$$

$$t=0: \quad |\Psi(0)\rangle = |1\rangle|1\rangle = |11\rangle$$
$$t=1: \quad |\Psi(1)\rangle = |1\rangle|0\rangle \quad = |10\rangle$$
$$t=2: \quad |\Psi(2)\rangle = \tfrac{1}{2}\big(|1\rangle + |0\rangle\big)\big(|1\rangle - |0\rangle\big)$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(|11\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |00\rangle\big)$$
$$t=3: \quad |\Psi(3)\rangle = \tfrac{1}{2}\big(|11\rangle + |00\rangle - |10\rangle - |01\rangle\big)$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(|1\rangle - |0\rangle\big)\big(|1\rangle - |0\rangle\big)$$
$$t=4: \quad |\Psi(4)\rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{H}\big(|1\rangle - |0\rangle\big)\big(|1\rangle - |0\rangle\big)$$
$$= |0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle - |0\rangle\big)$$

F-CNOT kapısı üst giriş 1 ise alt giriş olduğu gibi çıkışda görünür. Eğer üst giriş 0 olursa alt girişin tersi çıkışda görünür.

Örnek- 4.0: Aşağıdaki işlemi gerçekleştiren matris nedir?

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Bu matrisde kompleks terim olmadığı için matrisin tranposesi, Hermesyen eşleniği olur. Matrisin kendisi ile Hermesyen eşleniğinin çarpımı birim matris olduğunun bu matris bir quantum lojik kapısıdır.

Örnek – 5.0: İki qubit devrelerinde Tensor Çarpımı

- Qubitler, $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektörleri ile temsil edilir.

- $|ab\rangle$=$|a\rangle \otimes |b\rangle$=$\begin{pmatrix}a1\\a2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}b1\\b2\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}a1*b1\\a1*b2\\a2*b1\\a2*b2\end{pmatrix}$

- $|00\rangle$=$|0\rangle \otimes |0\rangle$=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

- $|01\rangle$=$|0\rangle \otimes |1\rangle$=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

- $|10\rangle$=$|1\rangle \otimes |0\rangle$=$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

- $|11\rangle$=$|1\rangle \otimes |1\rangle$=$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Two qubit gates: CNOT Quantum Lojik Kapısı

CNOT Gate= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- CNOT $|10\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle$

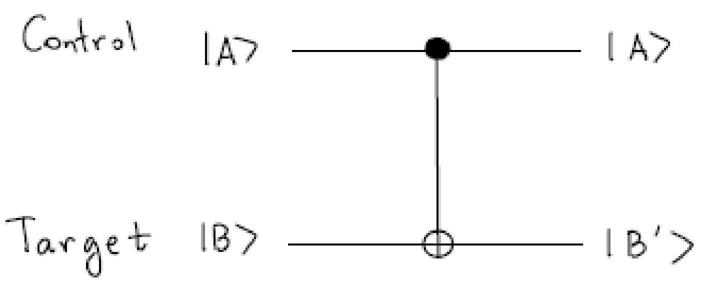
$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle; \;\; |01\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle; \;\; |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

TWO-QUBIT GATES

Controlled operations: "If A is true, then do B"

Controlled-NOT (CNOT) gate



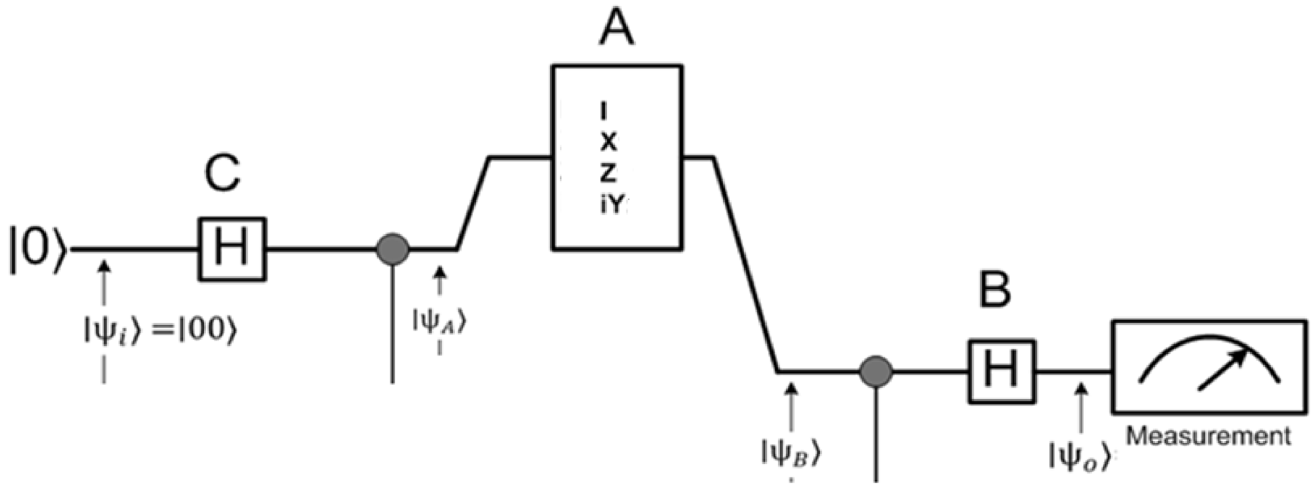
$\|AB\rangle$	$\|AB'\rangle$
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$\|11\rangle$	$\|10\rangle$

Gate operations: if control qubit is $|1\rangle$, then flip the target qubit.

İlk qubit 0 ise çıkış girişe eşit olur. İlk bit 1 ise çıkışda ilk bit 1 olur; ikinci bit durum değiştirir, 1 ise 0, 0 ise 1 olur.

Kuantum Süper Yoğun Kodlama
Quantum Superdense Coding

Örnek-6.0:



$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$ ise $iY=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

$|\psi 0\rangle = H\ A\ H\ |0\rangle$

A: I, X, Z, iY matrislerinden biri olabilir.

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$H|0\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

A'da Z quatum lojik kapısını alalım.

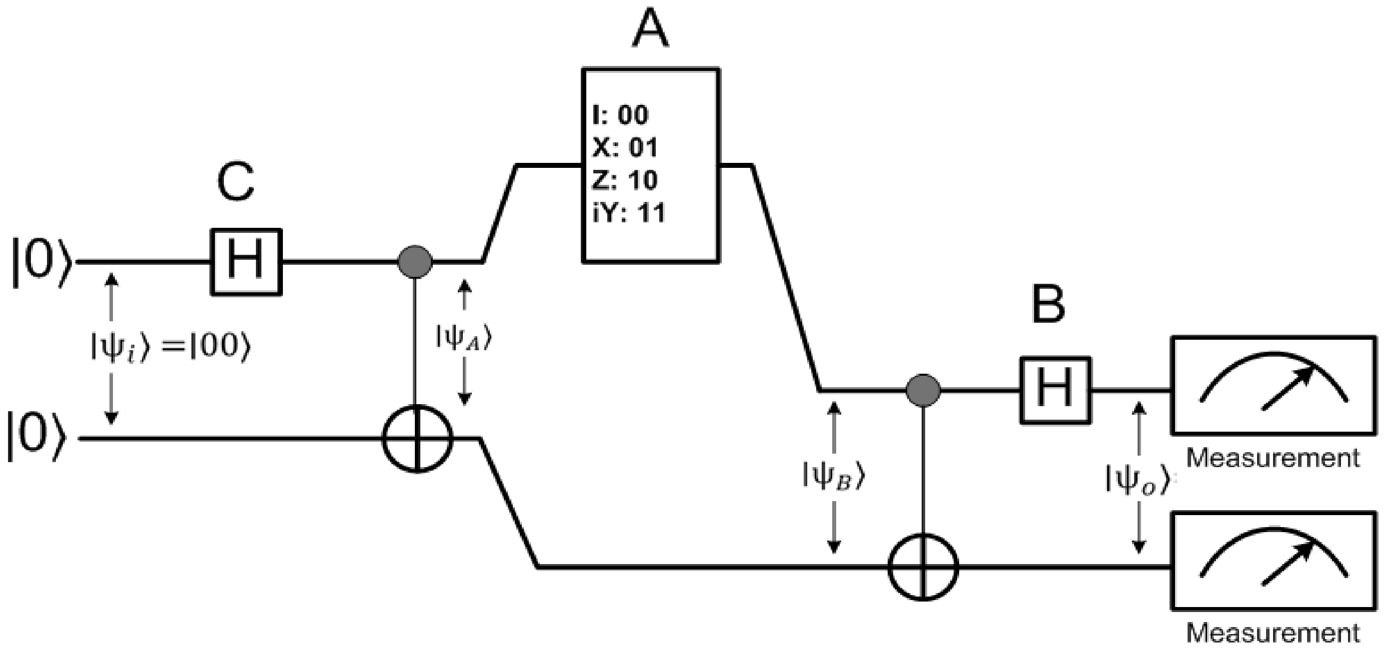
$Z\ H|0\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$|\psi_0\rangle = H\ Z\ H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle$

Örnek-7.0: Süper Yoğun Kodlama

- **Soru:** A kişisi B kişisine 2 klasik bitlik 4 adet bilgi göndermek istiyor. A kişisi Jupiter civarındaki bir göktaşında maden çıkarıyor, B kişisi ise İstanbul'da kahve içiyor. Klasik bitler olarak 00, 01, 10, 11 mesajlarından birini göndermek istiyor. Herbir klasik bit durumu bir şifreli mesaja karşılık gelmektedir. A kişisi B kişisine sadece 1 Qubit bilgi ile 2 klasik bit göndermek istiyor. Bir qubit ile 2 adet klasik bit gönderebilir mi? Bu mümkün mü? Yanıt: Evet, daha önce aralarında bir quantum dolanıklık var ise mümkündür. Dolanık olan iki elktrondan biri Boğazda diğeri ise Jupiterdeki quantum durumunda... Jupiterdeki oynadı mı Boğazdaki tepki veriri.



Örnek-7.1: Süper Yoğun Kodlama

- A kişisi klasik bit gönderirken kendine gelen qubiti kuantum lojik kapılarından geçirirken, kendine gelen qubite dokunmayacak, ölçmeyecektir.
- Quatum lojik devresinde giriş değerleri değiştirilemez, ölçme yapılamaz, çökme olur. 00, 01, 10, 11 klasik bitin her durumu için quatum lojik kapısı (Matris) değiştiriyorum.
- A kişisi 00 göndermek isterse kendine gelen qubiti **Uniter** kuantum lojik kapısından geçirecektir.
- A kişisi 01 göndermek isterse kendine gelen qubiti **X-NOT** kuantum lojik kapısından geçirecektir.
- A kişisi 10 göndermek isterse kendine gelen qubiti **Z** kuantum lojik kapısından geçirecektir.
- A kişisi 11 göndermek isterse kendine gelen qubitlere **iY** kuantum lojik kapısından geçirecektir.
- B kişisi kendisine gelen iki qubiti CNOT kapısından geçirir. Sonra birinci qubiti Hadamard kapısından geçirip ölçüp yapar. Böylece A kişisinden tek bir qubit almasına rağmen A kişisinden gelen bilginin 00, 01, 10, 11 den hangisi olduğu ölçerek belirler. Hangi dizisini gönderdiğini %100 kesinlikle öğrenir. Dolayısıyla mesaj almış olur.

Örnek-7.2: Süper Yoğun Kodlama

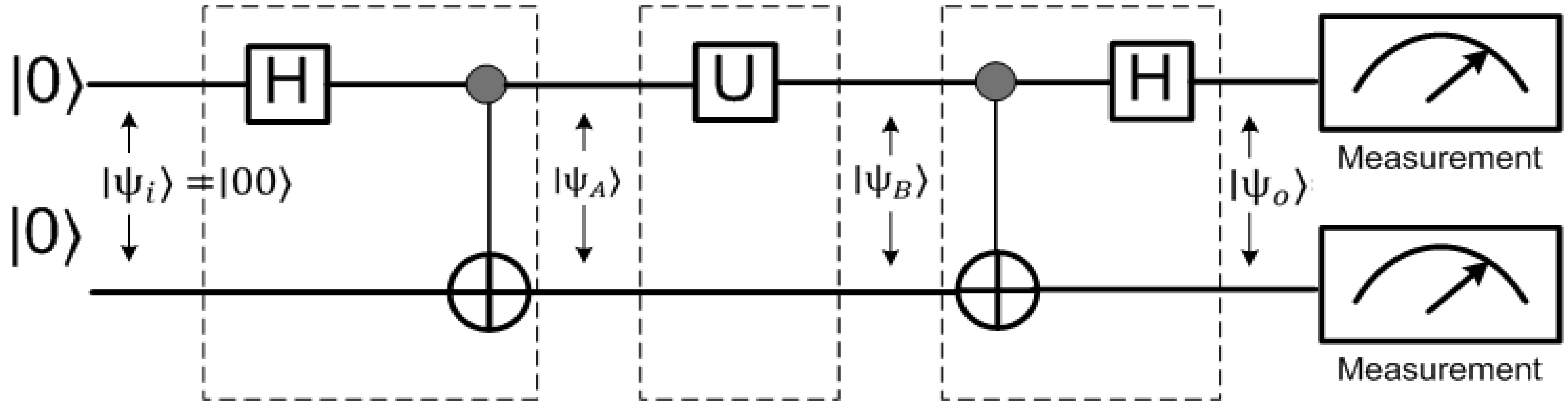
- Bu işlemde bir C kişisi olmalı ve önceden bir dolanık durum hazırlamalıdır. Bunun için $|0\rangle$'lık iki qubitlik $|00\rangle$ hazırlanır. Bu qubitlerden birini Hadamard quantum lojik kapısından ardından iki qubitlik bilgiyi CNOT quantum kapısından geçirirse çıkış ne olur? $|\psi_A\rangle$ ne olur?
- Öncelikle Hadamard kapısı çıkışında durumum bulunur. Birinci qubit, $|0\rangle$ Hadamard'dan geçerken ikinci qubit çarpan olarak kalır, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$ olur.
- Bu değer CNOT'tan geçerken CNOT birinci qubite bakar. Birinci qubit olduğu gibi geçer. Eğer birinci qubit 0 ise ikinci qubitde aynen geçer, birinci qubit 1 ise ikinci qubit durum değiştirir.
- Bu durumda $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ olacaktır. *Dolanıklık olmasından dolayı az bitle daha fazla bilgi paylaşımı olabilmektedir ve daha kompleks kodlamanın temelini oluşturmaktadır.* Çünkü C kişisi bir dolanık durum yaratmıştı. $|\psi_A\rangle$ qubitin ilk biti A kişisine diğeri ise B kişisine gönderilir.
- İlk Qubitler A kişisine ait, Fakat hangi bit olduğunu bilmiyor. Bakmıyor, çünkü ölçüm gerçekleştiremez. Gerçekleştirirse çökme olur.
- İkinci qubitler ise B kişisine ait. B kişisede kendi qubitinin ne olduğunu bilmiyor. Ölçüm yapamıyor.
- C Kişisi bu qubitleri quantum kanal ile gönderir. Quantum biti bir yerden başka bir yere transfer eden ortama quantum kanal denir. A ve B kişilere gelen qubitler süperpozisyon durumundadır.

Örnek-7.3: A kişisi 00 (Uniter) klasik bit göndermek isterse

- C kişisi $|\psi_i\rangle$ =$|00\rangle$ gönderip, bunları Hadamard ve CNOT kapısından geçirirse $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ dolanık durum oluşturur. Dolanık durumu oluşturulmaz ise bilgi alış verişi malasef mümkün olmaz. İstanbul'da Boğaz'ın kenarında çay içen adamın devresindeki elektron, Jupiter'dei devrenin elektron ile dolanıklığı var.
- Quantum uniter kapısı $|0\rangle$ girişini $|0\rangle$ çıkışına, $|1\rangle$ girişini ise $|1\rangle$ çıkışına dönüştürür. İkinci qubit doğrudan B'ye gönderilir.
- B kişisine $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ qubit gelecektir. B, önce bunu CNOT quantum lojik kapısından geçirecek. CNOT çıkışı, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$ olacaktır. Çünkü ilk bit control bilgisidir. Kontrol bit 0 ise ikinci qubite dokunmaz, kontrol bit 1 ise ikinci bit değişir. CNOT iki qubit ile işlem yapar.
- Şimdi bunu Hadamard kapısından geçirelim. Hadamard bir qubit ile işlem yapar, ikinci bit çarpan olur.
- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ Bu durmda Hadamard çıkışı,
- $|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle\right] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle) = |00\rangle$
- $|\psi_o\rangle = |00\rangle$ ölçmeden önceki quantum durumudur. Bu durumda olma ihtimali %100dür.
- $|\psi_o\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$ ifadesinde α_1=1, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ olduğundan ölçüm değeri $|00\rangle$ olur.

Örnek-7.4: A kişisi 00 klasik bit göndermek isterse

- $|\psi_i\rangle = |00\rangle$
- $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_o\rangle = |00\rangle$
- $|\psi_M\rangle = |00\rangle$ olasılık hesablamasında ölçülen değer 00 klasik bittir.

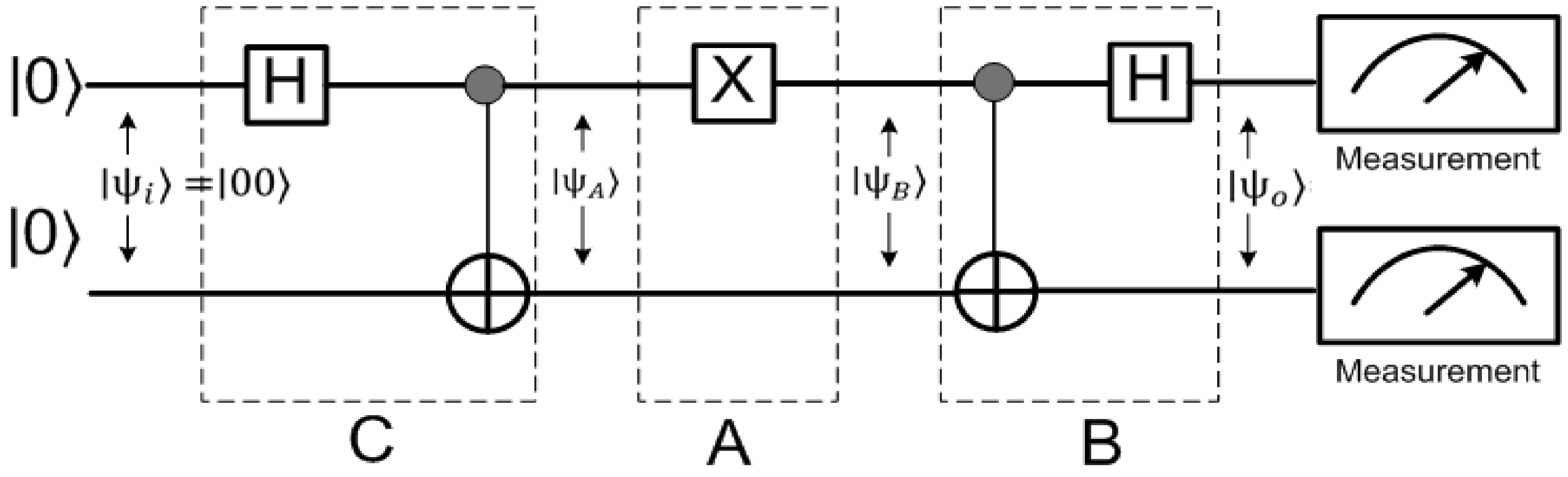


Örnek-7.5: **A kişisi 01 klasik bit göndermek isterse**

- C kişisi $|\psi_i\rangle$ =$|00\rangle$ gönderip, bunları Hadamard ve CNOT kapısından geçirirse $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ dolanık durum oluşturur. Dolanık durumu oluşturulmaz ise bilgi alış verişi malasef mümkün olmaz.
- A kişisi kendisine gelen kendi quantum bitini X-NOT quantum lojik kapısından geçirecektir. Quantum X-NOT kapısı $|0\rangle$ girişini $|1\rangle$ çıkışına, $|1\rangle$ girişini ise $|0\rangle$ çıkışına dönüştürür. İkinci qubit doğrudan B'ye gönderilir.
- B kişisine $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ qubit gelecektir. B önce bunu CNOT quantum lojik kapısından geçirecek. İlk bit control bilgisidir. Kontrol bit 0 ise ikinci qubite dokunmaz, kontrol bit 1 ise ikinci bit değişir. CNOT iki qubit ile işlem yapar. CNOT çıkışı, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle)$ olacaktır.
- Şimdi bunu Hadamard kapısından geçirelim. Hadamard birinci qubit ile işlem yapar.
- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ Bu durumda B kişisinin Hadamard çıkışı,
- $|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle\right] = \frac{1}{2}(|01\rangle - |11\rangle + |01\rangle + |11\rangle) = |01\rangle$
- $|\psi_o\rangle = |01\rangle$ ölçmeden önceki quantum durumu. Bu durumda olma ihtimali %100dür.
- $|\psi_o\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$ ifadesinde α_2=1, $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, olduğundan ölçüm değeri $|01\rangle$ olur.

Örnek-7.6: A kişisi 01 klasik (X-Gate) bit göndermek istesin

- $|\psi_i\rangle = |00\rangle$
- $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$
- $|\psi_o\rangle = |01\rangle$
- $|\psi_M\rangle = |01\rangle$, olasılık hesabında ölçülen değer 01 klasik bittir..

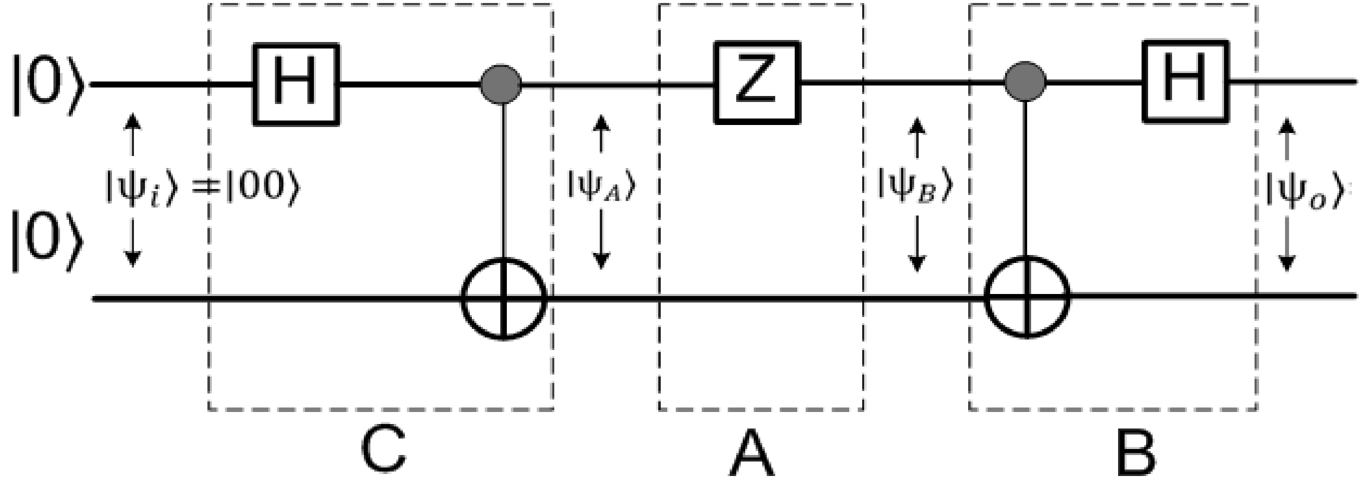


Örnek-7.7: **A kişisi 10 (Z-Gate) klasik bit göndermek istesin**

- C kişisi $|\psi_i\rangle = |00\rangle$ gönderip, bunları Hadamard ve CNOT kapısından geçirirse $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ dolanık durum oluşturur. Dolanık durumu oluşturulmaz ise bilgi alış verişi malasef mümkün olmaz.
- A kişisi kendisine gelen kendi quantum bitini Z quantum lojik kapısından geçirecektir. Quantum Z kapısı $|0\rangle$ girişini $|0\rangle$ çıkışına, $|1\rangle$ girişini ise $-|1\rangle$ çıkışına dönüştürür. İkinci qubit doğrudan B'ye gönderilir.
- B kişisine $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ qubit gelecektir. B önce bunu CNOT quantum lojik kapısından geçirecek. İlk bit control bilgisidir. Kontrol bit 0 ise ikinci qubite dokunmaz, kontrol bit 1 ise ikinci bit değişir. CNOT iki qubit ile işlem yapar.
- CNOT çıkışı, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$ olacaktır.
- Şimdi bunu Hadamard kapısından geçirelim. Hadamard birinci qubit ile işlem yapar.
- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, Bu durumda B kişisinin Hadamard çıkışı,
- $|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle\right] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |10\rangle) = |10\rangle$
- $|\psi_o\rangle = |10\rangle$ ölçmeden önceki quantum durumu. Bu durumda olma ihtimali %100dür. $|\psi_o\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$ ifadesinde α_3=1, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$, olduğundan ölçüm değeri $|10\rangle$ olur.

Örnek-7.8: A kişisi 10 klasik bit göndermek istesin

- $|\psi_i\rangle = |00\rangle$
- $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
- $|\psi_o\rangle = |10\rangle$
- $|\psi_M\rangle = |10\rangle$, ölçülen değer 10 klasik bittir..

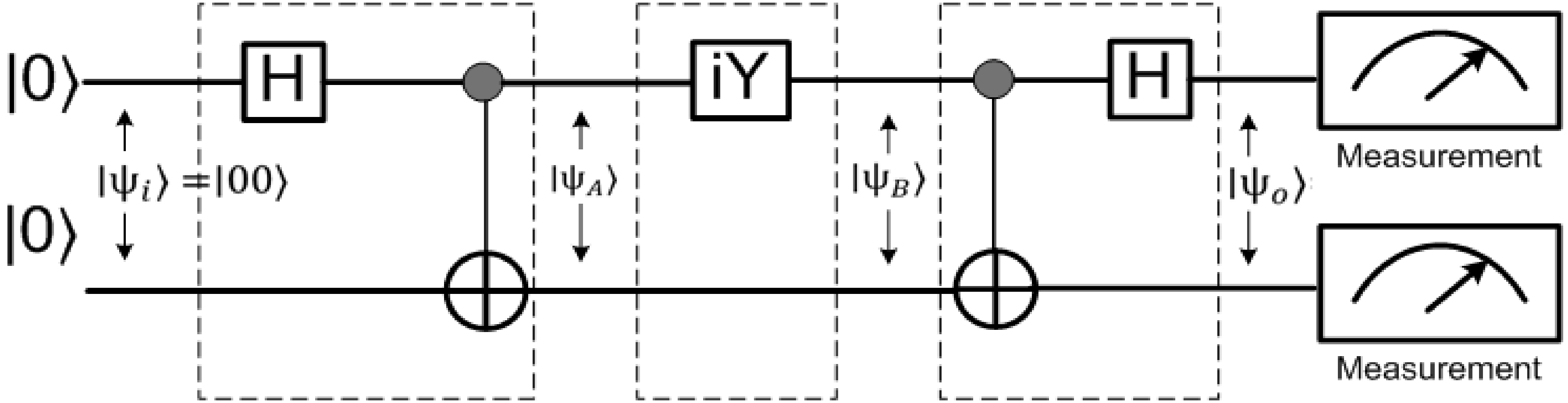


Örnek-7.9: **A kişisi 11 (iY) klasik bit göndermek istesin**

- C kişisi $|\psi_i\rangle = |00\rangle$ gönderip, bunları Hadamard ve CNOT kapısından geçirirse $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ dolanık durum oluşturur. Dolanık durumu oluşturulmaz ise bilgi alış verişi malasef mümkün olmaz.
- A kişisi kendisine gelen kendi quantum bitini iY quantum lojik kapısından geçirecektir. Quantum Y kapısı $|0\rangle$ girişini $i|1\rangle$ çıkışına, $|1\rangle$ girişini ise $-i|0\rangle$ çıkışına dönüştürür. İkinci qubit doğrudan B'ye gönderilir.
- B kişisine $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + 01\rangle)$ qubit gelecektir. B önce bunu CNOT quantum lojik kapısından geçirecek. İlk bit control bilgisidir. Kontrol bit 0 ise ikinci qubite dokunmaz, kontrol bit 1 ise ikinci bit değişir. CNOT iki qubit ile işlem yapar.
- CNOT çıkışı, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle + |01\rangle)$ olacaktır.
- Şimdi bunu Hadamard kapısından geçirelim. Hadamard birinci qubit ile işlem yapar.
- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, B kişisinin Hadamard çıkışı,
- $|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle\right] = \frac{1}{2}(-|00\rangle + |11\rangle + |00\rangle + |11\rangle) = |11\rangle$
- $|\psi_o\rangle = |11\rangle$ ölçmeden önceki quantum durumu. Bu durumda olma ihtimali %100dür. $|\psi_o\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$ ifadesinde α_4=1, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, olduğundan ölçüm değeri $|10\rangle$ olur.

Örnek-7.10: A kişisi 11 klasik bit göndermek istesin

- $|\psi_i\rangle = |00\rangle$
- $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle)$
- $|\psi_o\rangle = |11\rangle$
- $|\psi_M\rangle = |11\rangle$, ölçülen değer 11 klasik bittir..



Süper Yoğun Kodlamada Temel Özellik-1: Bell Durumları

A kişisi kendi qubitini değiştirdiğinde oluşan çıkışlarına Bell durumları denir.

- A kişisi 00 klasik bit göndermek istediğinde, $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |B_{00}\rangle$
- A kişisi 01 klasik bit göndermek istediğinde, $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = |B_{01}\rangle$
- A kişisi 10 klasik bit göndermek istediğinde, $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |B_{10}\rangle$
- A kişisi 10 klasik bit göndermek istediğinde, $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle) = |B_{11}\rangle$
- Bell durumlarının herbirisi dolanık durumdur. Yukarıda verilen 4 dolanık durum bir ortanormal vektör seti oluşturur.
- Bir vektör setinin ortanormal olup olmadığını belirlemek için iki şarta bakılır:

  1) Bütün vektörler normalize olmalı, boyları 1 birim olmalıdır.

  2) İkişer ikişer alındıkları zaman birbirleri ile ortagonal olmaldır. İç çarpımları 0 olması gerekmektedir.

  - Normları 1 dir: $\langle B_{00}|B_{00}\rangle$=1, $\langle B_{01}|B_{01}\rangle$=1, $\langle B_{10}|B_{10}\rangle$=1, $\langle B_{11}|B_{11}\rangle$=1
  - Ortagoneller 0 dır: $\langle B_{00}|B_{01}\rangle$=0, $\langle B_{00}|B_{10}\rangle$=0, $\langle B_{00}|B_{10}\rangle$=0, $\langle B_{00}|B_{11}\rangle$=0, ...
  - Yukarıdaki iki özelliği sağlayanlar ortanormal vektör setini oluştururlar.
- İki durumu birbirleri ile bir ölçüm ile kesin olarak ayırt edebilmemiz için yukarıdaki iki durumun sağlanması şarttır. Bu nedenle B kişisi 4 farklı durumu birbirinden kesin olarak ayırabilmektedir. A kişisinin hangi mesaji gönderdiğini %100 kesin olarak bulabilmektedir.

Süper Yoğun Kodlamada Temel Özellik-2: Dolanıklık

A kişisi ile B kişisi arasında bilgi alış verişi sadece ve sadece bir dolanık durumun qubitlerin varlığı ile mümkün olabilmektedir. Dolanık olmayan bir durum paylaşalım ve B kişisinin ne elde ettiğine bakalım.

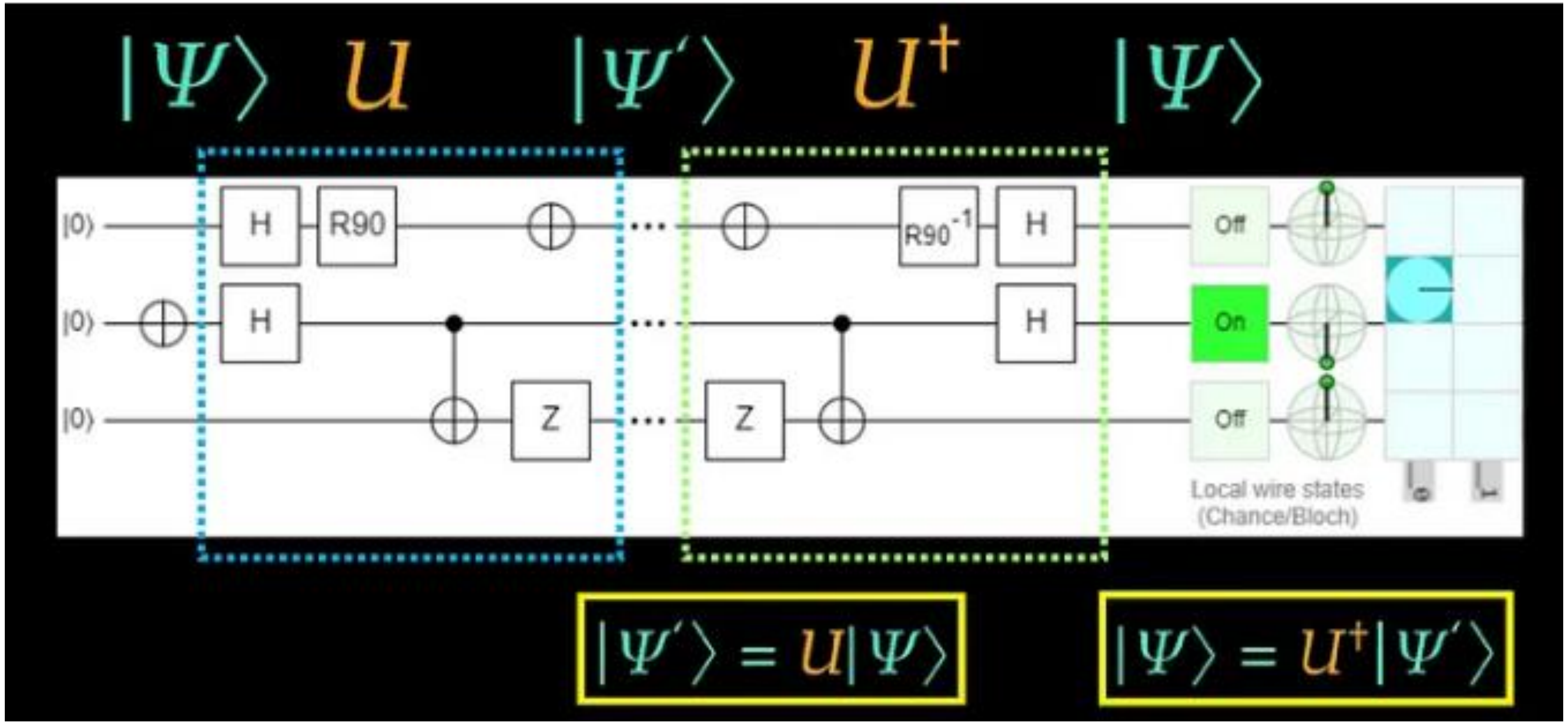
- Dolanıklılık:
- $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, İlkinde biri 0 diğer 0 olurken, ikincisinde biri 1 diğeri 1 olmakta, dolanıklık var.
- $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$, İlkinde biri 1 diğer 0 olurken, ikincisinde biri 0 diğeri 1 olmakta, dolanıklık var.
- Bell durumlarında bir tanesi ise bir dolanık durum söz konusu olur.

Örnek-6.12: Dolanık Olmayan Durumda A kişisi 01 klasik bit göndermek istesin

- C kişisi $|\psi_i\rangle = |01\rangle$ gönderip, bunları Hadamard ve CNOT kapısından geçirirse $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)$ durumu oluşturur. Dolanık durum değil. İlkinde biri 0 diğer 1 olurken, ikincisinde biri 1 diğeri 0 olmalıydı.
- Birinci qubiti A kişisine, ikinci qubiti B kişisine göndersin.
- A kişisi B kişisine 01 klasik bit göndermek istesin. Kendisine gelen kendi quantum bitini X-NOT quantum lojik kapısından geçirecektir. Quantum X-NOT kapısı $|0\rangle$ girişini $|1\rangle$ çıkışına, $|1\rangle$ girişini ise $|0\rangle$ çışına dönüştürür. . İkinci qubite dokunulmaz. B'ye göndirir.
- B kişisine $|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle)$ qubit gelecektir. B önce bunu CNOT quantum lojik kapısından geçirecek. İlk bit control bilgisidir. Kontrol bit 0 ise ikinci qubite dokunmaz, kontrol bit 1 ise ikinci bit değişir. CNOT iki qubit ile işlem yapar.
- CNOT çıkışı, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ olacaktır.
- Şimdi bunu Hadamard kapısından geçirelim. Hadamard birinci qubit ile işlem yapar.
- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
- B kişisinin Hadamard çıkışı,
- $|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle\right] = \frac{1}{2}(|00\rangle - |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$
- $|\psi_o\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$ ifadesinde $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/4$,
- Dolanık durum oluşturulmadığından isten mesaj iletilemedi.

Reversible Transformations in Quantum Circuit

Örnek-7.0: The Quantum Circuit and Reversed Quantum Circuit



Örnek-7.1: Reversible Transformations in Quantum Circuit

- The 3-qubits example below has |Ψ> = |010> and is transformed to |Ψ’> with a set of gate operations (U), resulting |Ψ’>. We do sequencing for the quantum circuit illustrated below from top to bottom (as ‘$q_0q_1q_2$’): q_0=0, q_1=1, q_2= 0. Note the X-gate operation on q_1 to set the initial state for qubit 1 to |1>.

- Then, we feed |Ψ’> as input to U conjugate transpose. |Ψ’> is then transformed back to |Ψ> = |010> (the sequence is q_0 = Off, q_1 = On, q_2 = Off).

Örnek-7.2:Quantum Lojik Kapılar

- U, bir dizi üniter kapıdan oluşan bir kuantum devresidir. U eşlenik devrik, her üniter kapının bir dizi eşlenik devrikinden oluşan ters kuantum devresidir.
- H, CNOT, X ve Z kapılarının eşlenik devriği kapının kendisi ile aynıdır. Böylece H, CNOT, X ve Z kapılarında kalırlar.

- R90, X ekseni boyunca 90 derecelik (π/2) bir dönüştür. R90 eşlenik devrik (R90-ters), R90'ın eşlenik devriğini gösterir.

Örnek-7.3: Quantum Lojik Kapılar

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

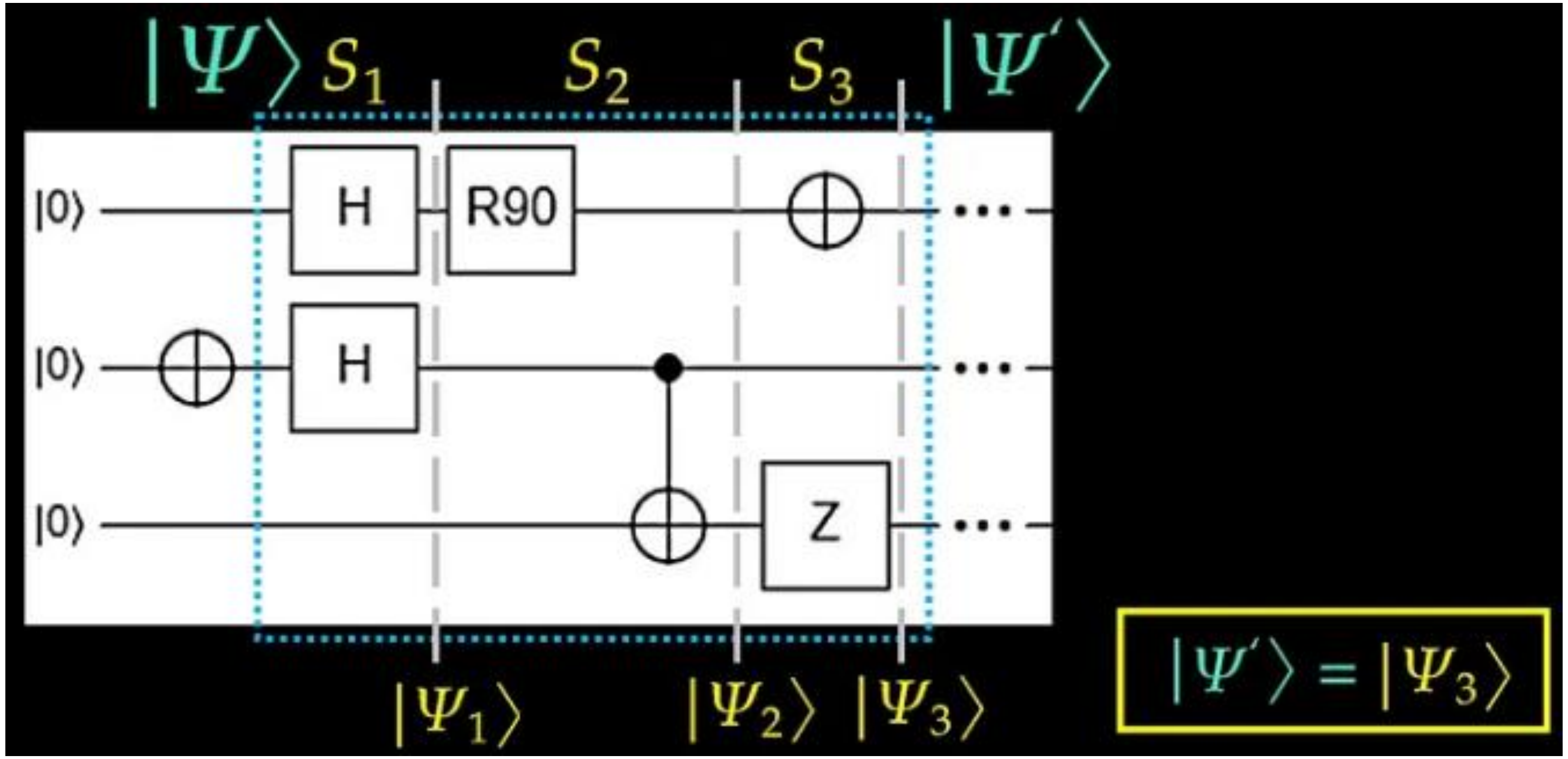
$$R90 = \begin{pmatrix} cos\,\frac{\pi}{2} & -sin\,\frac{\pi}{2} \\ sin\,\frac{\pi}{2} & cos\,\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix for the R90 gate.

$$R90^{\dagger} = R90^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix for the R90-inverse gate.

Örnek-7.4: U-Circuit



Örnek-7.5: Stage-1

- Aşama-1, birinci kübitteki H matrisinin, ikinci kübitteki H matrisinin ve 8x8'lik bir matris üreten Tanımlama matrisinin tensör ürünüdür. Kimlik matrisi üçüncü kübiti temsil eder.
- Bileşenlerin her birinin tensör çarpımını ilgili matrislerini iki H ve bir Özdeşlik için genişleterek yaparak, aşama-1 için aşağıdaki matrisi (8x8 boyutunda) elde ederiz.

$$S_1 = H \otimes H \otimes I$$

Örnek-7.6: Stage-1

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Örnek-7.7: Stage-2

- Stage-2 is the tensor product of the R90 matrix on the first qubit and CNOT matrix between the second dan third qubit, producing an 8x8 matrix. The identity matrix represents the third qubit.
- By doing the tensor product of each component by expanding their respective matrices for R90 and CNOT, we get the following matrix (8x8 dimension) for stage-2.

$$S_2 = R_{90} \otimes CNOT$$

Örnek-7.8: Stage-2

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Örnek-7.9: Stage-3

- Stage-3 is the tensor product of the X matrix on the first qubit, Identity matrix on the second qubit, and Z matrix on the third qubit, producing an 8x8 matrix.
- By doing the tensor product of each component by expanding their respective matrices for X, I, and Z, we get the following matrix (8x8 dimension) for stage-3.

$$S_3 = X \otimes I \otimes Z$$

Örnek-7.10: Stage-3

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Örnek-7.11: Combining Stage-1, Stage-2, and Stage-3

- Finally, the combination of S_3 x S_2 x S_1 is as follows. The matrix multiplication of S_3 x S_2 x S_1 can be computed by S_3 x (S_2 x S_1) or (S_3 x S_2) x S_1, with the same result.
- U = S_3 x S_2 x S_1, then intuitively, U conjugate transpose is (S_3 x S_2 x S_1) conjugated and transposed.

Örnek-7.12: Combining Stage-1, Stage-2, and Stage-3

$$S_3 x S_2 x S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Örnek-7.13: U x $|010\rangle$

- U x $|010\rangle$ = S_3 x S_2 x S_1 x $|010\rangle$

- $|010\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Örnek-7.14: U x $|010\rangle$

- U x $|010\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Usage Notes

- A lot of slides are adopted from the presentations and documents published on internet by experts who know the subject very well.
- I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,

Dr. Cahit Karakuş

cahitkarakus@gmail.com